令和 3 年度入学者選抜試験問題並びに答案用紙　（教育　数学Ⅰ・A・Ⅱ・B 表紙）

教　育　学　部

・試験開始までに，表紙の注意事項をよく読んでください。
・筆記用具は，試験開始まで，手にとってはいけません。

（注　意　事　項）

1. 試験開始の合図の後，すぐに用紙の種類と枚数（4 枚）を確かめて，すべての用紙に受験番号を記入してください。この配布物には，次の計 4 枚が含まれています。

   令和 3 年度入学者選抜試験問題並びに答案用紙　（教育　数学Ⅰ・A・Ⅱ・B 表紙）
   令和 3 年度入学者選抜試験問題並びに答案用紙　（教育　数学Ⅰ・A・Ⅱ・B その 1）
   令和 3 年度入学者選抜試験問題並びに答案用紙　（教育　数学Ⅰ・A・Ⅱ・B その 2）
   令和 3 年度入学者選抜試験問題並びに答案用紙　（教育　数学Ⅰ・A・Ⅱ・B その 3）

2. 試験終了後，配布されたすべての用紙を回収します。
3. 配布された用紙が上記 1. と異なっているときや印刷が不鮮明なときには，手を挙げて監督者に知らせてください。
4. 各「試験問題並びに答案用紙」の右下隅にある小計の欄には何も記入してはいけません。
5. 解答を書ききれないときは，その問題が記載してある用紙の裏面を利用してもかまいません。その場合は，問題記載の面の右下方に「裏面使用」と記入してください。

（教育　数学Ⅰ・A・Ⅱ・B 表紙）

受　験　番　号

令和 3 年度入学者選抜試験問題並びに答案用紙　（教育　数学I・A・II・B その1）

問題 1 次の問いに答えよ。答えだけでなく，どのように考えたのか，途中の計算および説明も書け。

(1) $a>0,\ b>0$, かつ $a^2+b^2=1$ のとき，等式 $\log_a b^2=\log_b ab$ を満たす実数 a,b の値を求めよ。

(2) n が自然数のとき，等式 $\dfrac{1}{2!}+\dfrac{2}{3!}+\dfrac{3}{4!}+\cdots+\dfrac{n}{(n+1)!}=1-\dfrac{1}{(n+1)!}$ が成り立つことを証明せよ。

(3) 1 辺の長さが 2 の正四面体 OABC について，辺 OA の中点を M とし，辺 OB，OC を 3 : 1 に内分する点をそれぞれ D，E とする。このとき，△MDE の面積を求めよ。

解答例

(1) $a>0,\ b>0$ および $a^2+b^2=1$ より，$0<a<1,\ 0<b<1$ である。対数の性質より $\log_a b^2=2\log_a b$, $\log_b ab=\log_b a+\log_b b=\log_b a+1$ である。また，底の変換公式より $\log_b a=\dfrac{\log_a a}{\log_a b}=\dfrac{1}{\log_a b}$ であるから，与えられた方程式は $2\log_a b-\dfrac{1}{\log_a b}-1=0$ である。ここで $t=\log_a b$ とおくと，$0<a<1$ から $\log_a b$ の底は 1 より小さいので，$0<b<1$ より $t=\log_a b>\log_a 1=0$ である。t を用いると与えられた方程式は $2t-\dfrac{1}{t}-1=0$ と表されるが，$t\fallingdotseq 0$ より，この方程式は $2t^2-t-1=0$ と同値である。左辺を因数分解すると $(2t+1)(t-1)=0$ であるから，$t=-\dfrac{1}{2},1$ である。これと $t>0$ より $t=1$ である。よって，$\log_a b=1$ であるから $a=b$ である。したがって，$a^2+b^2=1$ より $2a^2=1$ であるから，$a>0$ に注意すると $a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ である。以上から $a=b=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ である。

(2) 問題の等式を ① とおく。

[1] $n=1$ のとき (左辺) $=\dfrac{1}{2}$, (右辺) $=\dfrac{1}{2}$ であり，等式 ① は成り立つ。

[2] $n=k$ のとき等式 ① が成り立つ，すなわち，

$$\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\cdots+\frac{k}{(k+1)!}=1-\frac{1}{(k+1)!} \qquad \cdots\cdots ②$$

と仮定する。$n=k+1$ のとき，等式 ② より

$$\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\cdots+\frac{k}{(k+1)!}+\frac{k+1}{(k+2)!}=1-\frac{1}{(k+1)!}+\frac{k+1}{(k+2)!}=1-\frac{(k+2)-(k+1)}{(k+2)!}=1-\frac{1}{(k+2)!}$$

である。よって，$n=k+1$ のときも等式 ① が成り立つ。

[1], [2] よりすべての自然数 n について等式 ① は成り立つ。

(3) $\mathrm{OD}=2\times\dfrac{3}{4}=\dfrac{3}{2}=\mathrm{OE}$ である。また，△ODE は正三角形なので $\mathrm{DE}=\dfrac{3}{2}$ である。△OMD について，$\angle\mathrm{MOD}=60^\circ$, $\mathrm{OM}=1$, $\mathrm{OD}=\dfrac{3}{2}$ なので，余弦定理から $\mathrm{MD}^2=1^2+\left(\dfrac{3}{2}\right)^2-2\cdot1\cdot\dfrac{3}{2}\cdot\cos60^\circ=\dfrac{7}{4}$ より，$\mathrm{MD}=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$ である。△MDE は $\mathrm{MD}=\mathrm{ME}$ の二等辺三角形なので，M から DE に下ろした垂線 MH の長さは，三平方の定理から $\mathrm{MH}^2=\mathrm{MD}^2-\mathrm{DH}^2=\mathrm{MD}^2-\left(\dfrac{1}{2}\mathrm{DE}\right)^2=\dfrac{7}{4}-\dfrac{9}{16}=\dfrac{19}{16}$ より，$\mathrm{MH}=\dfrac{\sqrt{19}}{4}$ である。よって，求める面積は $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{19}}{4}=\dfrac{3\sqrt{19}}{16}$ である。

（教育　数学I・A・II・B その1）

（解答を書ききれないときはこの用紙の裏面を利用してもよい。）

受 験 番 号

小　計

問題 2 関数 $f(x)$ は等式 $f(x) = 3x^2 + \int_0^2 xf(t)dt + \int_{-1}^1 f(t)dt$ を満たす。次の問いに答えよ。

(1) $f(x)$ を求めよ。

(2) 関数 $g(x) = xf(x) + x$ の区間 $-\frac{1}{2} \leqq x \leqq \sqrt{3}$ における最大値と最小値を求めよ。

解答例

(1) $A = \int_0^2 f(t)dt,\ B = \int_{-1}^1 f(t)dt$ とおくと，$f(x) = 3x^2 + Ax + B$ であるから

$$A = \int_0^2 (3t^2 + At + B)dt = \left[t^3 + \frac{1}{2}At^2 + Bt\right]_0^2 = 8 + 2A + 2B \quad \text{より} \quad A + 2B = -8$$

となり，同様に

$$B = \int_{-1}^1 (3t^2 + At + B)dt = \left[t^3 + \frac{1}{2}At^2 + Bt\right]_{-1}^1$$
$$= (1 + \frac{1}{2}A + B) - (-1 + \frac{1}{2}A - B) = 2 + 2B \quad \text{より} \quad B = -2$$

となる。したがって，$A = -4,\ B = -2$ が得られ，$f(x) = 3x^2 - 4x - 2$ である。

(2) $g(x) = xf(x) + x = 3x^3 - 4x^2 - x$ であるから

$$g'(x) = 9x^2 - 8x - 1 = (9x + 1)(x - 1)$$

より，増減表は下のようになり $g(x)$ は $x = -\frac{1}{9},\ 1$ で極値をとる。

x	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	$-\frac{1}{9}$	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{3}$
$g'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$
$g(x)$	$g(-\frac{1}{2})$	$\nearrow$	$g(-\frac{1}{9})$	$\searrow$	$g(1)$	$\nearrow$	$g(\sqrt{3})$

ここで，$g\left(-\frac{1}{2}\right),\ g\left(-\frac{1}{9}\right),\ g(1),\ g(\sqrt{3})$ を計算して大小を比較すると，

$$g\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{8} - 1 + \frac{1}{2} = -\frac{7}{8}$$

$$g\left(-\frac{1}{9}\right) = -\frac{3}{9^3} - \frac{4}{9^2} + \frac{1}{9} = \frac{-1 - 12 + 27}{243} = \frac{14}{243}$$

$$g(1) = 3 - 4 - 1 = -2 < -\frac{7}{8} = g\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$g(\sqrt{3}) = 9\sqrt{3} - 12 - \sqrt{3} = 8\sqrt{3} - 12 > 8 \cdot 1.7 - 12 = 1.6 > \frac{14}{243} = g\left(-\frac{1}{9}\right)$$

以上より $x = \sqrt{3}$ で最大値 $8\sqrt{3} - 12$，$x = 1$ で最小値 -2 をとる。

（教育　数学I・A・II・B その2）

（解答を書ききれないときはこの用紙の裏面を利用してもよい。）

受 験 番 号

小　計

問題 3 a, b を正の実数とし，s, t を $0 < s < 1,\ 0 < t < 1$ を満たす実数とする。座標平面上に原点 O と 2 点 A$(a, 0)$，B$(0, b)$ がある。線分 OA を $s : (1-s)$ に内分する点を P，線分 BA を $t : (1-t)$ に内分する点を Q，線分 BP と線分 OQ の交点を R とする。$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = k\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1) k を s, t で表せ。

(2) R が線分 OP を直径とする円の円周上にあるとする。このとき $k = \dfrac{(1-t)b^2}{t^2a^2 + (1-t)^2b^2}$ であることを示せ。

(3) (2) のときの R が，△OAB の重心 G と一致するとき，$\dfrac{a}{b}$ の値を求めよ。

解答例

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = t\overrightarrow{\mathrm{OA}} + (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ であり，$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = k\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = kt\overrightarrow{\mathrm{OA}} + k(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ である。また，$\mathrm{BR} : \mathrm{RP} = u : (1-u)$ とおくと $\overrightarrow{\mathrm{OR}} = u\overrightarrow{\mathrm{OP}} + (1-u)\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ であり，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ より $\overrightarrow{\mathrm{OR}} = us\overrightarrow{\mathrm{OA}} + (1-u)\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ である。ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ は $\overrightarrow{0}$ でなく，また平行でないから

$$\begin{cases} us = kt \\ 1-u = k(1-t) \end{cases}$$

を得る。$u = \dfrac{tk}{s}$ から $1 - \dfrac{tk}{s} = k(1-t)$ であり，これを整理すると $s = (s+t-st)k$ となる。ここで $s+t-st = 1-(1-s)(1-t) > 0$ より

$$k = \frac{s}{s+t-st}$$

である。

(2) R が線分 OP を直径とする円周上にあるとき，円周角の定理より $\overrightarrow{\mathrm{OQ}} \perp \overrightarrow{\mathrm{BP}}$ である。このことと $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ より

$$\begin{aligned} 0 = \overrightarrow{\mathrm{OQ}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BP}} &= (t\overrightarrow{\mathrm{OA}} + (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OB}}) \cdot (s\overrightarrow{\mathrm{OA}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}}) \\ &= ts\,|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2 - t\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} + (1-t)s\,\overrightarrow{\mathrm{OB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}} - (1-t)|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2 \\ &= sta^2 - (1-t)b^2 \end{aligned}$$

であるから，$s = \dfrac{(1-t)b^2}{ta^2}$ を得る。したがって，(1) より

$$k = \frac{\dfrac{(1-t)b^2}{ta^2}}{\dfrac{(1-t)b^2}{ta^2} + t - \dfrac{(1-t)b^2}{ta^2}t} = \frac{(1-t)b^2}{t^2a^2 + (1-t)^2b^2}$$

である。

(3) R が G と一致するとき，Q は線分 AB の中点である。よって，$t = \dfrac{1}{2}$ である。また，R が G と一致するとき，R は線分 OQ を $2:1$ に内分する点であるから，$k = \dfrac{2}{3}$ である。したがって，(2) より

$$\frac{2}{3} = \frac{\dfrac{1}{2}b^2}{\dfrac{1}{4}a^2 + \dfrac{1}{4}b^2} = \frac{2b^2}{a^2+b^2}$$

を得る。これを整理すると $a^2 = 2b^2$, よって $\left(\dfrac{a}{b}\right)^2 = 2$ である。ここで $a, b > 0$ より $\dfrac{a}{b} > 0$ であるから，$\dfrac{a}{b} = \sqrt{2}$ である。

（教育　数学I・A・II・B その3）

（解答を書ききれないときはこの用紙の裏面を利用してもよい。）

受 験 番 号

小　計